PRÁCTICA Nº 14

DIAGONALIZACIÓN.

1. DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

Dado un endomorfismo f: $V \rightarrow V$ con matriz asociada A, veremos cómo calcular valores y vectores propios de A mediante comandos del Mathematica y a partir del polinomio característico. Para finalizar la diagonalización calcularemos también la matriz regular, P, de forma que $D = P^{-1}AP$ siendo D diagonal.

1.1. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UN ENDOMORFISMO. POLINOMIO CARACTERÍSTICO.

Sea V un espacios vectorial sobre K y sea f: $V \rightarrow V$ una endomorfismo de V. Se dice que el escalar $\lambda \in$ K es un <u>valor propio</u> (o autovalor) de f si existe un vector no nulo $u \in V$ de forma que $f(u) = \lambda u$.

Para un escalar $\lambda \in$ K, llamaremos <u>vector propio</u> (o autovector) asociado a λ a cada vector u de V tal que $f(u)= \lambda u$. Denotamos por V_λ al conjunto de todos los autovectores asociados a λ, esto es:

$$V_\lambda=\{u \in V \mid f(u) = \lambda u\}$$

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n, f un endomorfismo de V y sea A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Dado $\lambda \in$ K, se verifica:

1. $V_\lambda = Ker(f - \lambda I)$.
2. V_λ es un subespacio vectorial de V.
3. $dim(V_\lambda) = n - rg(A - \lambda I)$.
4. λ es autovalor de $f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

El subespacio V_λ recibe el nombre de <u>subespacio propio</u> de λ.

■

Según hemos visto, para un endomorfismo *f* de matriz asociada *A*, un escalar λ es un valor propio de *f* si y solo si, det(*A* - λ*I*) = 0; ahora bien, considerando λ como indeterminada, este determinante:

$$\det(A - \lambda I)= \begin{array}{cccc} a_{11}-\lambda & a_{12} & \boxed{?} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \boxed{?} & a_{2n} \\ \boxed{?} & \boxed{?}\,\boxed{?} & & \boxed{?} \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxed{?} & a_{nn}-\lambda \end{array}$$

es un polinomio en λ, p(λ), de grado *n* que recibe el nombre de <u>polinomio característico</u> de *f*. Los valores propios serán precisamente las raíces del polinomio característico. En particular se tiene que el número máximo de valores propios distintos de *f* es exactamente *n*. Además, el polinomio característico de *f* no depende de la matriz asociada a *f* que se considere.

Ejemplo. Sea *f*: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, x + 3y + z, x + y + 3z)$$

Calcular el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios.

In[]:= **f[{x_,y_,z_}]:={3x+y+z, x+3y+z, x+y+3z}**
B= IdentityMatrix[3];
A= Transpose[Table [f[B[[i]]],{i,1,3}]];
p[t_] = Det[A - t*B]

Out[]= `20 - 24 t + 9 t^2 - t^3`

In[]:= **Solve[p[t]==0, t]**

Out[]= `{{t -> 2}, {t -> 2}, {t -> 5}}`

Por tanto los valores propios del endomorfismo son 2 con multiplicidad 2 y 5En Mathematica ya existe una orden que hace esto directamente:

In[]:= **Eigenvalues[A]**

Out[]= `{2, 2, 5}`

Ahora para calcular los vectores propios tenemos que calcular *Ker*(*f* - λI) para cada uno de los valores propios.

In[]:= **Id[{x_,y_,z_}]:={x,y,z}**

g[{x_,y_,z_}]=f[{x,y,z}] - t* Id[{x,y,z}] ;
Ag = Transpose[Table [g[B[[i]]],{i,1,3}]]

Out[]= `{{3 - t, 1, 1}, {1, 3 - t, 1}, {1, 1, 3 - t}}`

In[]:= **Solve[(Ag/.t->5).{x,y,z}=={0,0,0}, {x,y,z}]**

Out[]= `{{x -> z, y -> z}}`

Con esto el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 5$ es

$$V(5) = \{(a, a, a) \mid a \in \nabla\}$$

y una base suya es el vector (1,1,1).

In[]:= **Solve[(Ag/.t->2).{x,y,z}=={0,0,0}, {x,y,z}]**

Out[]= `{{x -> -y - z}}`

Con esto el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ es

$$V(2) = \{(-a - b, a, b) \;/\; a, b \in \nabla\}$$

y una base suya es la formada por los vectores (-1,1,0) y (-1,0,1). Observar que el conjunto formado por {(1,1,1), (-1,1,0), (-1,0,1)} es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios. En Mathematica existe una orden que calcula esto directamente:

In[]:= **Eigenvectors[A]**

Out[]:= `{{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}`

O bien, autovalores y autovectores pueden calcularse de una vez de la forma:

In[]:= **Eigensystem[A]**

Out[]= `{{2, 2, 5}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}`

■

En general, puede ocurrir que el polinomio característico no tenga exactamente n raíces. Una primera posibilidad involucra al cuerpo que se esté considerando, así si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ todas las raíces del polinomio han de estar en $\mathbb{C}$, pero si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puede suceder que el polinomio característico tenga raíces imaginarias que no nos sirven como autovalores, incluso aun cuando tenga todas las raíces en $\mathbb{R}$, puede tener menos de n valores propios distintos por la aparición de raíces múltiples.

Para cada i, llamaremos <u>multiplicidad algebraica</u> del valor propio λ_i a la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico, es decir, el mayor exponente α_i para el cual el factor $(\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$ aparece en la descomposición de $p(\lambda)$. Llamaremos <u>multiplicidad geométrica</u> de λ_i a la dimensión d_i del subespacio propio V_{λ_i}, esto es:

$$d_i = dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A - \lambda_i I)$$

La relación entre las multiplicidades algebraicas y geométricas viene dada por el siguiente resultado.

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre λ de dimensión n y sea f: $V \rightarrow V$ un endomorfismo de V de matriz asociada A y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sus valores propios distintos. Entonces para cada $i = 1, \ldots, r$ se tiene $1 \leq d_i \leq \alpha_i$.

■

1.2. DIAGONALIZACIÓN DE UN ENDOMORFISMO POR SEMEJANZA.

Se dice que una matriz cuadrada A es diagonalizable si existe una matriz diagonal D semejante a A. Diremos que el endomorfismo f: $V \rightarrow V$ es diagonalizable si existe una base de V con respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

Proposición. Un endomorfismo f: $V \rightarrow V$ es diagonalizable si existe una base de V formada por vectores propios de f.

■

El problema de la diagonalización queda totalmente resuelto en el siguiente teorema:

Teorema. Sea f: $V \rightarrow V$ un endomorfismo y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sus distintos valores propios. Entonces f es diagonalizable si, y solo si, se verifica las siguientes condiciones:

1. $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$ (todas las raíces del polinomio característico de f están en …).
2. $d_i = \alpha_i$, para cada $i = 1, \ldots, r$.

■

Corolario. Sea A una matriz cuadrada de orden n, si A tiene n valores propios distintos en K, entonces es diagonalizable.

■

El problema de la diagonalización se resume:

- **Paso 1:** Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.
- **Paso 2:** Descomponemos $p(\lambda)$ se calculan sus raíces. Tenemos calculados los valores propios λ_i y sus multiplicidades algebraicas α_i.
- **Paso 3:** Se calculan las multiplicidades geométricas, $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.
- **Paso 4:** Se aplica el criterio de diagonalización. si para algún i se tiene $d_i \neq \alpha_i$, entonces la matriz no es diagonalizable. En caso contrario la matriz es diagonalizable y su forma diagonal es la matriz diagonal cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad.
- **Paso 5:** Obtenemos bases de los subespacios propios $V_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i I)$.
- **Paso 6:** Uniendo estas bases se obtiene una base de V para la cual la matriz asociada es D. Así pues la matriz de cambio de base, cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores propios, es la matriz de paso P que verifica

$$D = P^{-1}AP.$$

Ejemplo 2. Sea f: $R^3 \rightarrow R^3$ el endomorfismo definido por

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, x + 3y + z, x + y + 3z)$$

¿Es diagonalizable? En caso afirmativo calcular una matriz diagonal D y una matriz regular P, de forma que $D = P^{-1}AP$, siendo A la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

In[]:= **f[{x_,y_,z_}]:={3x+y+z, x+3y+z, x+y+3z}**
B= IdentityMatrix[3];
A= Transpose[Table [f[B[[i]]],{i,1,3}]];
v=Eigensystem[A]

Out[]= `{2, 2, 5}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}`

In[]:= **Det[v[[2]]]!=0**

Out[]= `True`

Aunque en este caso sabemos que f es diagonalizable por lo realizado en el ejemplo 1, lo hemos comprobado de nuevo, calculando el determinante de v[[2]] y como es distinto de cero, v[[2]] es una base de ∇^3 formada por vectores propios.

In[]:= **d=DiagonalMatrix[v[[1]]];**
P = Transpose[v[[2]]];
Inverse[P].A.P == d

Out[]= `True`

■